Noch ein paar abschließende Bemerkungen:

Def 2.2: Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $\boxed{n \geq k}$ sei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (0! := 1)$$

(lies n über k)

rechne nach:

1.) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

2.) $1 \leq k \leq n$: $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$

(Konvention: $\binom{\ell}{m} := 0$, falls $\ell < m$)

3.) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \; 0 \le k \le n.$

Anwendungen:

Satz 2.4: Für $a, b \in \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$) und $n \in \mathbb{N}$ gilt (binomische Formel)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

mit der Konvention $\boxed{x^0 := 1}$.

Folgerungen: 1.) $\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$

(wähle $a = b = 1$)

2.) $\boxed{0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}}$

(wähle $a = 1, \; b = -1$)

Beweis von Satz 2.4 : (Induktion)

$n = 1$: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^{k} =$

$\binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$;

Induktionsschluss: $(a+b)^{n+1} =$

$a \cdot (a+b)^{n} + b \cdot (a+b)^{n} \overset{=}{\text{IV}}$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} +$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} +$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k} \quad !$$

(Verschieben des Index)

Einsetzen $\Longrightarrow$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} \cdot a^{n+1-k} b^{k}$$

$$+ b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

$$+ b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \qquad \square$$

<u>Satz 2.5</u>: Sei A eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Für $k \in \{0, \dots, n\}$ gibt es $\binom{n}{k}$ Teilmengen von A mit k Elementen.

<u>Idee des Beweises</u>: Um k Elemente aus A auszuwählen, hat man

n Möglichkeiten für das 1^{te},

$n-1$ -II- 2^{te},

$\vdots$

$n-k+1$ -II- k^{te}

insgesamt: $n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)$

Da die Reihenfolge bei Mengen keine Rolle spielt, muss man durch $k!$ teilen.

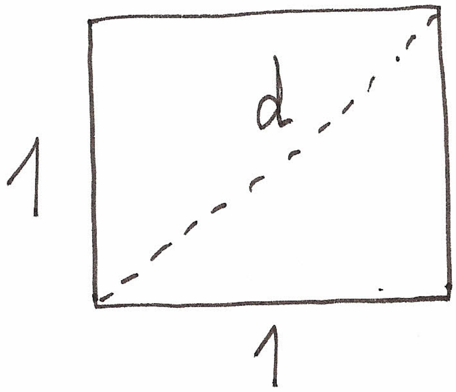
$\square$

<u>Korollar</u>: Die Gesamtzahl aller Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist 2^n.

$$\left(\text{denn} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \right) \qquad \square$$

§3 Die reellen Zahlen

mit $\mathbb{Q}$ kommt man in der Analysis
__nicht__ aus!



Quadrat mit Kantenlänge 1

__Frage:__ __Länge d der Diagonalen__?

__Beh:__ $\boxed{d \notin \mathbb{Q}}$

__Beweis__: falls doch („indirekt“), so ist

$$\boxed{d = \frac{m}{n}}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$ und

$\boxed{\text{o.E. teilerfremd}}$ (*)

Nach Pythagoras gilt

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Longrightarrow m^2 = 2n^2$$

Also: m^2 gerade $\Longrightarrow$ $\boxed{m \text{ gerade}}$;

schreibe $m = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$

Dann: $(2k)^2 = 2n^2 \Longrightarrow n^2 = 2k^2$

Also: n^2 gerade $\Longrightarrow$ $\boxed{n \text{ gerade}}$

Wenn aber m, n gerade sind, so widerspricht dies (*).

$\square$

axiomatische Konstruktion von $\mathbb{R}$:

(vgl. H. Meschkowski, Zahlen, BI)

- $\mathbb{R}$ umfasst $\mathbb{N}$ (sowie $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$)
- Addition und Multiplikation sind „umkehrbar"
- $\mathbb{R}$ hat eine Ordnung
- $\mathbb{R}$ ist $\boxed{\text{lückenlos}}$ („d $\in \mathbb{R}$")

Schritte zu aufwendig für die Vorlesung!

Wir stellen einfach fest:

$$\boxed{\text{Es gibt eine Menge } \mathbb{R} \supset \mathbb{N} \text{ mit den nachfolgend unter I. bis IV. gelisteten Eigenschaften.}}$$

$\boxed{\text{Axiome der Mengenlehre}}$ + $\boxed{\text{Schlussregeln („Logik")}}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Modell für } \mathbb{N}}$: $\emptyset, \{\emptyset\}, \ldots\ldots$ „Induktionsprinzip"

$\downarrow$

$\boxed{\text{Gruppe } (\mathbb{Z},+)}$, $\boxed{\text{Körper } (\mathbb{Q},+,\cdot)}$

$\downarrow$

"$\boxed{\mathbb{R}}$" $\supsetneqq \mathbb{Q} \supsetneqq \mathbb{Z} \supsetneqq \mathbb{N}$

<u>Eigenschaften</u> <u>von $\mathbb{R}$</u> :

I. Körper (alg. Struktur)

II. Ordnungsstruktur

III. archimedische Eigenschaft ($\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ in gewisser Weise)

IV. $\boxed{\text{Vollständigkeit von } \mathbb{R}}$

I. algebraische Struktur („Körperaxiome")

Auf $\mathbb{R}$ hat man die Operationen

Addition :	$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Multiplikation :	$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

„Axiome der Addition": $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$

(1) Kommutativgesetz: $x + y = y + x$

(2) Assoziativgesetz: $(x+y)+z = x+(y+z)$

(3) $\exists$ additiv neutrales Element 0,

$$\boxed{x + 0 = x}$$

(4) zu $x \in \mathbb{R}$ existiert ein Element ($-x$ genannt) mit $\boxed{x + (-x) = 0}$

M. a. W. : $(\mathbb{R}, +, 0)$ ist abelsche Gruppe.

Axiome der Multiplikation :

$(1)'$, $(2)'$ . . . .

$(3)'$ 1 ist multiplikativ neutral :

$$\boxed{1 \cdot x = x \cdot 1 = x}$$

$(4)'$ zu $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ gibt es ein Element ($\frac{1}{x}$ oder x^{-1} genannt) mit

$$\boxed{x \cdot x^{-1} = 1}$$

M. a. W. : $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot, 1)$ ist abelsche Gruppe

Verknüpfung von „+" und „·"

Distributivgesetz: $\boxed{x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z}$

(rechts keine Klammern: „Punktrechnung geht vor Strichrechnung")

Fazit: $\boxed{(\mathbb{R},+,\cdot) \text{ ist ein Körper}}$ $\Longrightarrow$

Satz 3.1: (Notation: $x-y$ statt $x+(-y)$)

Es gilt für alle reellen Zahlen (Körperelemente)

(1) $-(-a) = a$, $-(a+b) = -a-b$

(2) Aus $a+x=b$ folgt $x = b-a$

(3) $0 \cdot a = 0$

(4) <u>Nullteilerfreiheit</u>: $a \cdot b = 0 \Longrightarrow$

$$a = 0 \text{ oder } b = 0$$

(5) aus $a \cdot x = b$ folgt für $a \neq 0$:

$$x = a^{-1} \cdot b$$

(6) $\begin{cases} (-a) \cdot (-b) = a \cdot b, \\ (-a) \cdot b \quad = -(a \cdot b) \end{cases}$

(7) $a \neq 0 \Longrightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

(8) $a, b \neq 0 \Longrightarrow (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

<u>Beweis</u>: „(Lineare) Algebra";

(1) - (8) gelten in <u>jedem</u> <u>Körper</u> $(K, +, \cdot)$

speziell auch <u>in $\mathbb{Q}$</u>. $\square$

Notationen: (Potenzen mit ganzzahligen Exponenten)

- $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$: $a^0 := 1$,

  $a^{n+1} := a \cdot a^n$;

- $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$:

  $a^{-m} := \left(a^{-1}\right)^m$.

Zeige damit die

$\boxed{\text{Potenzgesetze}}$ (für Exponenten aus $\mathbb{Z}$):

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ n, m \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, \\ \left(a^m\right)^n &= a^{m \cdot n}, \\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \end{aligned} \right\}$$

solange alle Terme definiert sind!

II. Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$

(zeichnet $\mathbb{R}$ auch noch nicht vor $\mathbb{Q}$ aus !)

Der Körper $\mathbb{R}$ ist angeordnet, d.h.:

(1) für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Bedingungen

$$\boxed{x > 0 \quad , \; x < 0 , \; x = 0}$$

(Vergleich mit der Null)

(2) $$\boxed{x, y > 0 \Longrightarrow \begin{cases} x + y > 0 \\ \text{und} \\ x \cdot y > 0 \end{cases}}$$

Vereinbarung: a) $\boxed{x > y \; :\Longleftrightarrow \; x - y > 0}$

b) $x \geq y :\Longleftrightarrow x > y$ oder $x = y$,

usw.

Satz 3.2: (Rechnen mit Ungleichungen)

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine Beziehung: $x < y$, $x = y$, $y < x$.
(Vergleichbarkeit)

(b) Transitivität:

$$x > y \text{ und } y > z \Longrightarrow x > z$$

(c) $x > y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x^{-1} < y^{-1}, & \text{falls } \boxed{y > 0} \\ x + z > y + z & \forall z \in \mathbb{R} \\ x \cdot z > y \cdot z & \forall z > 0 \end{cases}$$

(d) $x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$;

$$\boxed{1 > 0, \quad n+1 > n \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

(__$\mathbb{N}$ bleibt mit seiner Ordnung in $\mathbb{R}$ erhalten__).

entfällt

__Beweis__: exemplarisch 1ter Teil von (d)

Sei $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

__Fall 1__: $x > 0 \underset{(2)}{\Longrightarrow} x^2 = x \cdot x > 0$

__Fall 2__: $x < 0 \underset{\text{„Def"}}{\Longrightarrow} -x > 0 \underset{(2)}{\Longrightarrow}$

$(-x) \cdot (-x) > 0 \Longrightarrow x^2 > 0$

Bem: Ersetzt man in (b), (c) die Voraussetzungen durch „$\geq$", so gelten die Folgerungen entsprechend mit „$\geq$" bzw. „$\leq$".

$\square$

höheres Niveau, zentrale Bedeutung hat

Satz 3.3: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{x \geq -1}$ gilt die

Ungleichung von Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweis: Übung (Induktion + Satz 3.2)

„=" nur für $n = 1$ oder $x = 0$!